MA2 – „písemná" přednáška (za 16.3.2020)

Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu – dokončení

Co jsme již „udělali" v předchozí přednášce (písemná k 11.3):

1. Formulace počáteční (Cauchyho) úlohy pro soustavu obyčejných lineárních rovnic 1. řádu (pomocí maticového proku – zápis)

Máme najít funkci $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in C_n^{(1)}(a,b)$ tak,

aby (1) $x'(t) = A(t)x(t) + f(t)$, $t \in (a,b)$

(2) $x(t_0) = p$, $t_0 \in (a,b)$, $p \in R^n$

(Značení: $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,..n}$,

$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, $x'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$, $t \in (a,b)$)

Byla uvedena existenční věta:

Věta: Je-li $f(t) \in C_n(a,b)$, $a_{ij}(t) \in C(a,b)$, $i,j = 1,..,n$, pak úloha (1), (2) má právě jedno řešení $x(t) \in C_n^{(1)}(a,b)$.

a dále:

Rovnici (1) lze „přepsat": $x'(t) - A(t)x(t) = f(t)$, $t \in (a,b)$, kde zobrazení $x(t) \in C_n^{(1)}(a,b) \longrightarrow x'(t) - A(t)x(t) \in C^{(1)}(a,b)$ je lineární – tedy zde „fungují" rada lineární algebry:

„Rady "lineární algebry":

1) najděte řešení homogenní rovnice, tj. soustavy

$$(3) \qquad x'(t) - A(t)x(t) = 0 \ ;$$

množina řešení soustavy homogenní (3) je vektorový prostor V_H, podprostor prostoru $C_n^{(1)}(a,b)$ – „stačí" najít bázi V_H

2) najděte partikulární řešení $x_p(t) \in C^{(1)}(a,b)$ soustavy

$$x'(t) - A(t)x(t) = f(t),$$

3) pak všechna řešení jsou ve tvaru

$$x(t) = x_0(t) + x_p(t), \quad t \in J,$$

kde $x_0(t) \in V_H$.

A odsud otázky (podobné těm u diferenciálních rovnic lineárních 2. řádu) pro dnešní přednášku:

1) a) V_H, $\dim V_H$, báze V_H (zde u OLDR 2. řádu byla užitečná existenční věta)
b) „nalezení" báze V_H

2.) výpočet $x_p(t)$ – asi bude opět „fungovat" metoda variace konstant (a odhad $x_p(t)$ u „jednodušších" soustav)

3) budou zde nějaké problémy, podobné těm u OLDR 2. řádu? (tam – vícenásobný kořen charakteristické rovnice, nebo komplexní kořeny)

A nyní si ukážeme, jak lze „splnit" jednotlivé kroky obecného návodu pro řešení našeho problému, tj. řešení soustav obyčejných lineárních dif. rovnic (OLDR) aspoň v jednodušším případě – (jako u OLDR 2. řádu) budeme řešit ten nejjednodušší problém, kdy koeficienty soustavy budou konstanty, tj. „bude"

$$A(t) = A = (a_{ij})_{i,j=1,..,n} \text{ - matice konstant}$$

– toto bude v „bodě" 1 b)

<u>Ale ještě dříve k 1 a)</u> (? $\dim V_H$)

<u>Věta:</u> Je-li $A(t)$ čtvercová matice řádu n, $a_{ij}(t) \in C(a,b)$ $(i,j=1,..n)$, pak prostor V_H řešení homogenní soustavy

$$(3) \ldots \quad \underline{x'(t) - A(t)x(t) = 0 \quad , t \in (a,b)}$$

má dimenzi <u>n</u> (tj. $\dim V_H = n$)

Větu lze dokázat stejně jako u OLDR 2. řádu užitím existenční věty pro úlohu počáteční (1), (2). – viz minulá „přednáška"

<u>„Narochní" důkazu (pro zájemce):</u>

zvolme $t_0 \in (a,b)$, $p^{(i)} = (0,..0,\overset{i}{1},0..0)$ $(= \vec{e}_i)$; pak existuje jediné řešení $v^{(i)}(t)$ rovnice (3) takové, že $v^{(i)}(t_0) = p^{(i)}$; pak $v^{(1)}(t), .., v^{(n)}(t)$ jsou lineárně nezávislá řešení a každé řešení rovnice homogenní (3) je jejich lineární kombinací (podobně, jako u OLDR 2. řádu)

tedy, je-li $x(t)$ řešení (3), pak ex. $c_1, \dots c_n \in R$, tak, že
$$x(t) = c_1 v^{(1)}(t) + c_2 v^{(2)}(t) + \dots + c_n \cdot v^{(n)}(t), \quad t \in (a,b),$$

tj.:
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} v_{11}(t) \\ v_{21}(t) \\ \vdots \\ v_{n1}(t) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} v_{1n}(t) \\ v_{2n}(t) \\ \vdots \\ v_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \text{pak} \\ \text{lze} \\ \text{také} \\ \text{psát} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_{11}(t), \dots, v_{1n}(t) \\ v_{21}(t), \dots, v_{2n}(t) \\ \dots \quad \dots \\ v_{n1}(t), \dots, v_{nn}(t) \end{pmatrix}}_{V(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Tedy, <u>všechna řešení</u> mají „tvar" <u>$x(t) = V(t) \cdot c$</u>, $c \in R^n$

<u>$V(t)$ – fundamentální matice</u> příslušná rovnici (3);

a platí, že <u>$V(t)$ je regulární matice pro všechna $t \in (a,b)$</u>

<u>Řešení počáteční úlohy : $x(t_0) = p$</u> ...(4) $(t_0 \in (a,b))$

– máme najít $c \in R^n$ tak, aby <u>$V(t_0) \cdot c = p \Rightarrow c = V^{-1}(t_0) \cdot p$</u>

tedy, řešení počáteční úlohy v případě homogenní soustavy (3) je

<u>$x_{poč}(t) = V(t) \cdot V^{-1}(t_0) p, \quad t \in (a,b)$</u>

matice $V(t) \cdot V^{-1}(t_0) = U(t, t_0)$ – <u>standardní matice</u> pro počáteční úlohu (3),(4),

(je $U(t_0, t_0) = I$)

A pak (v obvyklém značení) – řešení počáteční úlohy (3),(4)

je $\underline{x_{poč}(t) = U(t,t_0)p \ , \ t\in(a,b)}$

A nyní už zbývá jen problém, jak najít fundamentální matici pro danou soustavu OLDR 1. řádu.

Minule jsme zkusili „nahodou" hledat řešení, byla-li matice soustavy konstantní, ve tvaru $x(t)=ve^{\lambda t}$, $\lambda\in ?$, $v\in R^n$,

tj. hledáme $\lambda \in \mathbb{C}$ (?), $v\in R^n$ tak, aby

$$x'(t) = A\cdot x(t) \ ,$$

a dostaneme: $\underline{\lambda v e^{\lambda t} = A\cdot v e^{\lambda t}}$

(neboť $x'(t) = (x_1'(t),\dots,x_n'(t)) = (\lambda v_1 e^{\lambda t}, \lambda v_2 e^{\lambda t}, \dots \lambda v_n e^{\lambda t}) =$
$= \lambda v e^{\lambda t} \ \left(= \lambda (v_1,\dots,v_n) e^{\lambda t}\right)$)

tj. hledáme: λ – vlastní číslo matice A a
v – vlastní vektor, příslušný vl. číslu λ

A říkali jsme si (v „kapitolce" o vlastních číslech a vlastních vektorech), že

jsou-li vl. čísla (čtvercové) matice řádu n navzájem různá (a měli jsme jen „reálná" vlastní čísla), pak vlastní vektory, příslušné těmto vlastním číslům, jsou LNZ a tvoří bázi R^n,

v příkladech v minulé „přednášce" to takto „vyšlo",

obecně lze dokázat:

Pokud matice A soustavy $x'(t) = Ax(t)$ má navzájem různá reálná vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, $\lambda_i \in R$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, pak, označme-li $v^{(i)}$ vlastní vektor, příslušný vl. číslu λ_i, pak vektory $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ jsou LNZ a obecné řešení homogenní soustavy (3), je

$$\underline{x_H(t) = V(t) \cdot c, \quad t \in R, \ c \in R^n}$$

kde
$$V(t) = \begin{pmatrix} v_{11}, & v_{12}, & \dots, & v_{1n} \\ v_{21}, & v_{22}, & , & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1}, & v_{n2}, & , & v_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{kde} \quad \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix} = v^{(i)} \right)$$
$i = 1, 2, \dots n$

<u>a řešení počáteční úlohy</u> $x'(t) = A\,x(t), \ x(t_0) = p \ (t_0 \in R)$

je $\underline{x_{poč}(t) = V(t)\,V^{-1}(t_0)\,p}, \ t \in R$

<u>Naznačení důkazu pro $n=2$ (opět pro zájemce – nepovinné!)</u>

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ vlastní čísla matice A, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$; $v^{(1)}, v^{(2)}$ vl. vektory, a řešení soustavy pak jsou $v^{(1)}(t) = v^{(1)} e^{\lambda_1 t}$, $v^{(2)}(t) = v^{(2)} e^{\lambda_2 t}$;

Pokud by $v^{(1)}, v^{(2)}$ byly LZ vektory, existovala by konstanta $(0 \neq) c \in R$ tak, že $v^{(1)} = c\,v^{(2)}$; pak ale $Av^{(1)} = c\,Av^{(2)}$, tj.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 v^{(1)} &= c\,\lambda_2 v^{(2)} \\ \text{ale } v^{(1)} &= c\,v^{(2)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot c \cdot v^{(2)} = 0, \text{ ale}$$
$$v^{(2)} \neq 0, \ c \neq 0, \ \lambda_1 \neq \lambda_2 \ \text{– \underline{spor!}}$$

(pro n-libovolné – důkaz indukcí)

a příklad $(n=2)$:

Je dána soustava a počáteční podmínky:

$$x_1' = x_1 - 3x_2 \quad , \quad x_1(0) = -1$$
$$x_2' = 4x_1 - 6x_2 \quad , \quad x_2(0) = 2$$

maticově: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) Vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$:

? λ tak, ať $\det(A - \lambda I) = 0$, tj. $\begin{vmatrix} 1-\lambda, & -3 \\ 4, & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow \quad (6+\lambda)(\lambda-1) + 12 = 0$, tj.

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad , \text{ tj.}$$
$$(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$

2) vlastní vektory (dopočtete sami): $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

a tedy f.s.: $v^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, $v^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t}$ a

$$\text{a} \quad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}_H = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-2t}, & 3e^{-3t} \\ e^{-2t}, & 4e^{-3t} \end{pmatrix}}_{V(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in R, \; c_1, c_2 \in R$$

$V(t)$ – fundamentální matice (pro náš příklad)

Řešení počáteční úlohy: $x(0)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$?

„obecné": $x_{poč}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}, & 3e^{-3t}\\ e^{-2t}, & 4e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$, $x(0)=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$, $t\in R$

tedy $x_{poč}(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}, & 3e^{-3t}\\ e^{-2t}, & 4e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix} =$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 4e^{-2t}-3e^{-3t}, & -3e^{-2t}+3e^{-3t}\\ 4e^{-2t}-4e^{-3t}, & -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{pmatrix}}_{U(t,0)}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}, \quad t\in R$$

$U(t,0)$ – standardní matice pro „náš" příklad

Pro $p=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ je řešení $x_{poč}(t) = \begin{pmatrix}-10e^{-2t}+9e^{-3t}\\ -10e^{-2t}+12e^{-3t}\end{pmatrix}$, $t\in R$

(tj. $x(0)=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$)

Další příklady budou obsaženy v příloze - „příklady k přednášce" 16.3.

Poznámka: Souvislost OLDR 2. řádu s konstantními koeficienty a soustavou dvou rovnic lineárních 1. řádu (s konstantními koeficienty) (zde homogenní)

Minule – soustavu, kterou jsme „neuměli" (zatím) řešit, jsme převedli na OLDR 2. řádu s konstantními koeficienty – a pak jsme řešení soustavy zvládli a zatím jsme získali „inspiraci" k obecnému řešení soustav – zkusíme teď „obecně":

Mějme soustavu $(n=2)$ (s konstantními koeficienty)

$$(1)\qquad x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$(2)\qquad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

Nechť $a_{12}\neq 0$ (kdyby $a_{12}=0$, pak pro $x_1(t)$ máme rovnici 1. řádu, a pak dosazením do druhé rovnice i rovnici „jen" pro x_2)

pak $x_2(t) = \dfrac{1}{a_{12}}\left(x_1'(t) - a_{11}x_1(t)\right)$ a dosadíme-li do (2):

$$\frac{1}{a_{12}}\left(x_1''(t) - a_{11}x_1'(t)\right) = a_{21}x_1(t) + \frac{a_{22}}{a_{12}}\left(x_1'(t) - a_{11}x_1(t)\right)$$

a pak $\quad x_1''(t) - a_{11}x_1'(t) = a_{12}a_{21}x_1(t) + a_{22}\left(x_1'(t) - a_{11}x_1(t)\right)$

a tedy $\quad x_1''(t) - (a_{11}+a_{22})x_1'(t) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1(t) = 0 \quad (*)$

a charakteristická rovnice pro OLDR 2. řádu $(*)$:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{12})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad !$$

$=$

a charakteristická rovnice pro matici dané soustavy je

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ tj. } (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0, \text{ tj.}$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad !$$

A obráceně: ukážeme si, že rovnici 2. řádu (lineární s konst. koeficienty „u nás") lze převést na řešení soustavy dvou rovnic lineárních 1. řádu (a odtud též je návod pro řešení OLDR řádu vyššího než 2)

Nečjmee rovnici $y'' + py' + qy = 0$

Položme: $x_1 = y$, $x_2 = y'$ pak: $x_1' = x_2$, $x_2' = -p x_2 - q x_1$

Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$, charakteristická rovnice matice A

je $\begin{vmatrix} -\lambda, & 1 \\ -q, & -p-\lambda \end{vmatrix} = 0$, tj. $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$!

a pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (což „umíme" u soustav řešit) máme:

$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, a $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

(složky vektorů jsou řešením rovnice $-\lambda_1 v_{11} + v_{21} = 0$, resp. $-\lambda_2 v_{12} + v_{22} = 0$), tedy fundamentální matice

je $V(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$ a

$$x_H(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}, & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (t \in R), \text{ a tedy}$$

$$y(t) \left(= x_1(t)\right) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in R \qquad (\text{cbd})$$

Poznámka:

Případy, kdy vlastní čísla matice A jsou i vícenásobná (tj. vícenásobnými kořeny charakteristické rovnice) nebo komplexní, jsme neřešili ani v lineární algebře, tedy nemáme ani nástroj pro řešení soustav OLDR 1. řádu – ale polož "umíme" soustavu OLDR 1. řádu převést na OLDR 2. řádu, tak pro $n=2$ to „asi" zvládneme řešit – ukážu příklady dvojnásobného vlastního čísla a vlastních čísel komplexních ve slíbené půlce s příklady k dnešní „přednášce".

Teď jistě ukázáme variaci konstant $\big)$ obecně – (příklady opět v půlce)

Máme řešit soustavu $\quad (a_{ij}(t) \in C(a,b), f(t) \in C(a,b))$

$$(*) \qquad \underline{x'(t) = A(t).x(t) + f(t)}$$

nechť $x_H(t) = V(t)c \quad (V(t)$ – fundamentální matice$)$

Variace konstant pro nalezení řešení nehomogenní soustavy $(*)$:
(obecně asi (?))

$$\underline{x(t) = V(t).c(t)} \quad , \text{ a hledáme } c(t) \text{ tak, aby}$$

$$\big(V(t)\,c(t)\big)' = A(t)\,V(t)c(t) + f(t)$$

„kdyby" $\big(V(t)c(t)\big)' = V'(t)c(t) + V(t).c'(t)$ – platí, ukáže síto $\big)$

pak máme: $\quad V'(t)c(t) + V(t)\,c'(t) = A(t)\,V(t)\,c(t), \quad t \in (a,b)$

Ale protože $V(t)$ je fundamentální matice, platí $V'(t)=A(t)\,V(t)$
(ukažte si to – „problémek" z přednášky – asi pomůže,
že sloupce matice $V(t)$ jsou řešení soustavy homogenní,
tj. $\left(v^{(i)}(t)\right)' = A(t)\cdot v^{(i)}(t)$, $i=1,2,\dots n$)

Pak dostáváme:

$$A(t)V(t)\cdot c(t) + V(t)\cdot c'(t) = A(t)V(t)c(t)+f(t)$$

tj.: $$V(t)\cdot c'(t) = f(t)$$

a ex. $V^{-1}(t)$ $\Rightarrow$ $$c'(t)=V^{-1}(t)f(t)\ ,\quad t\in(a,b),$$
($V(t)$ je regulární matice)

a tedy $$\underline{c(t)=\int V^{-1}(t)f(t)\,dt}$$

Ale co asi je integrál vektorové funkce? „Asi"

$$\begin{pmatrix} c_1(t)\\ c_2(t)\\ \vdots\\ c_n(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \omega_1(t)\,dt\\ \int \omega_2(t)\,dt\\ \dots\\ \int \omega_2(t)\,dt\end{pmatrix},\quad \text{pokud}\quad \begin{pmatrix} c_1'(t)\\ c_2'(t)\\ \vdots\\ c_n'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(t)\\ \omega_2(t)\\ \dots\\ \omega_n(t)\end{pmatrix}$$

Tedy („asi" – budeme podrobněji zkoumat při vyšetřování „vektorových funkcí jedné proměnné" – další „přednáška")

Říká se „lidově": „derivace vektoru je vektor derivací"
a „integrál vektoru je vektor integrálů"